

解けて欲しい微分方程式達

作成: 黒木 玄

2019-06-29 作成

2019-07-02 完全微分方程式, Ricatti, Clairaut.

2020-05-19 強制振動での $\alpha \rightarrow \omega$ での極限の計算。

2020-07-01 Hermite の多項式の解説を追加した。

2020-07-07 ベクトル場の図を追加

2020-07-14 積分因子という用語の紹介を追加した。

定数係数の線形常微分方程式

$\partial = \frac{\partial}{\partial x}$, $u = u(x)$, $p_1, \dots, p_n$ は定数。

$$(*) \quad (\partial^n + p_1 \partial^{n-1} + \dots + p_{n-1} \partial + p_n)u = 0$$

解き方

特性方程式 $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = (\lambda - \alpha_1)^{m_1} \dots (\lambda - \alpha_s)^{m_s}$ の α_i が互いに異なるとき、方程式 $(*)$ のすべての解は

$$(**) \quad u(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{m_i-1} a_{ik} x^k e^{\alpha_i x} \quad (a_{ik} \text{ は定数})$$

と一意に表される。特に $m_1 = \dots = m_s = 1$ (重根がない場合) には $(*)$ の解は

$$u(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + \dots + a_n e^{\alpha_n x} \quad (a_i \text{ は定数})$$

の形になる。定数 a_{ik} (もしくは a_i) たちは他の条件によって決定される。

例

$(\partial^2 + \omega^2)u = 0$, $\omega > 0$ の解は $e^{\pm i\omega x} = \cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x)$ を使うと、

$$u(x) = a e^{i\omega x} + b e^{-i\omega x} = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

と書ける。ここで $A = a + b$, $B = i(a - b)$ 。さらに条件 $u(0) = a$, $u'(0) = b$ を課すと、

$$u(x) = a \cos(\omega x) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega x)$$

例

$(\partial^2 + 5\partial + 6)u = u'' + 5u' + 6u = 0$, $u(0) = a$, $u'(0) = b$ の解を求めよう。

$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$ より $\lambda = -2, -3$ なので、解は

$$u(x) = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$$

と書ける。このとき、 $u'(x) = -2Ae^{-2x} - 3Be^{-3x}$ であり、

$$u(0) = A + B = a \quad \cdots (1)$$

$$u'(0) = -2A - 3B = b \quad \cdots (2)$$

$3 \times (1) + (2)$ より $A = 3a + b$

$2 \times (1) + (2)$ より $-B = 2a + b \implies B = -2a - b$

と解けるので、解は

$$u(x) = (3a + b)e^{-2x} + (-2a - b)e^{-3x}$$

例

$(\partial^2 + \omega^2)^2 u = 0$ の解は $e^{\pm i\omega x}$ と $xe^{\pm i\omega x}$ の一次結合で書ける。 $e^{\pm i\omega x} = \cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x)$ を代入すると、解は

$$u(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) + cx \cos(\omega x) + dx \sin(\omega x)$$

と表わされることがわかる。

強制振動付きの調和振動子

$\omega > 0$ とする。 $u = u(t)$, $\partial = \frac{\partial}{\partial t}$ とする。

$$(*) \quad (\partial^2 + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t)$$

解法

(*) の右辺を $f(t)$ と書くと、 $f(t)$ は $(\partial^2 + \alpha^2)f = 0$ の解になっている。ゆえに (*) の両辺に $(\partial^2 + \alpha^2)$ を作用させると

$$(\partial^2 + \alpha^2)(\partial^2 + \omega^2)u = (\partial^2 + \alpha^2)f = 0$$

と書き直される。特性多項式 $(\lambda^2 + \alpha^2)(\lambda^2 + \omega^2) = (\lambda - i\alpha)(\lambda + i\alpha)(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega)$ が重根を持たない場合 $(\alpha \neq \omega)$ と持つ場合 $(\alpha = \omega)$ に場合分けして考える。

(i) $\alpha \neq \omega$ のとき

このときの解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)$$

と書ける。このとき

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= -\omega^2(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) - \alpha^2(c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)) \\ (\partial^2 + \omega^2)u &= (\omega^2 - \alpha^2)(c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)) \end{aligned}$$

これと (*) を比較すると、

$$c = \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \quad d = \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2}$$

のとき、これが (*) の解になることがわかる。(*) の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t)$$

(ii) $\alpha = \omega$ のとき (共鳴)

このときの解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + ct \cos(\omega t) + dt \sin(\omega t)$$

と書ける。このとき、 $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$ を $f = ct, dt, g = \cos(\omega t), \sin(\omega t)$ に使うと、

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= -\omega^2 u(t) - 2\omega c \sin(\omega t) + 2\omega d \cos(\omega t) \\ (\partial^2 + \omega^2)u(t) &= -2\omega c \sin(\omega t) + 2\omega d \cos(\omega t) \end{aligned}$$

ゆえに、 $c = -\frac{q}{2\omega}, d = \frac{p}{2\omega}$ は (*) をみたす。(*) の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t)$$

例: $u''(t) + u(t) = \sin t$

初期条件 $u(0) = 1, u'(0) = 0$ の解を求めよう。

$u(t) = a \cos t + b \sin t - \frac{1}{2}t \cos t$ のとき、 $\dot{u}(t) = -a \sin t + b \cos t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2}t \sin t$

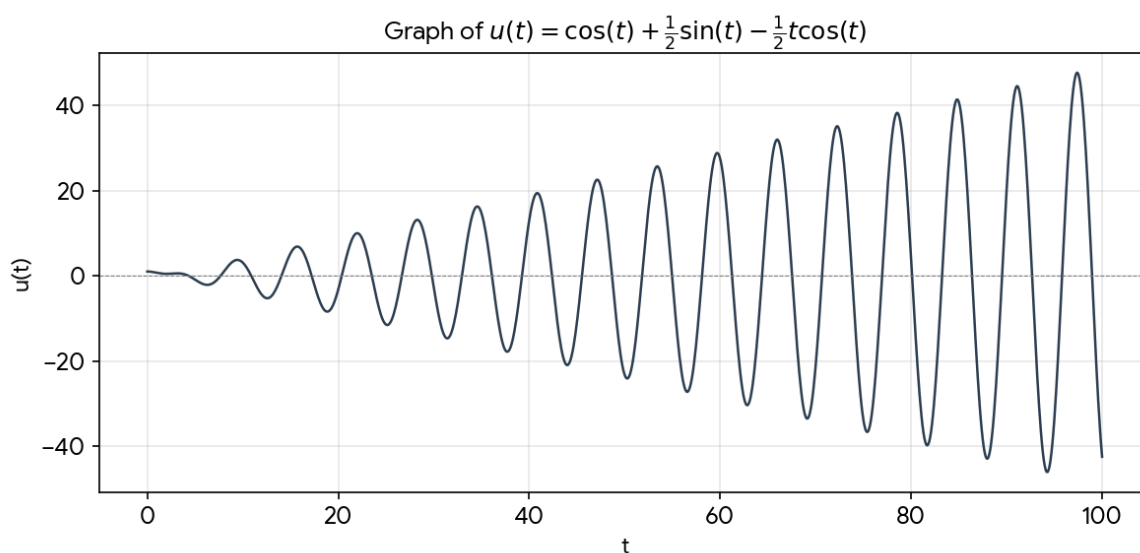
$u(0) = a = 1, u'(0) = b - \frac{1}{2} = 0 \implies b = \frac{1}{2}$

$$u(t) = \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t$$

Mathematicaでの確認例:

```
In[1]:= ode1 = {u''[t] + u[t] == Sin[t], u[0] == 1, u'[0] == 0}
In[2]:= DSolve[ode1, u[t], t] // Simplify // Expand
Out[2]= {{u[t] -> Cos[t] - (1/2) t Cos[t] + Sin[t]/2}}
```

この解のプロット:



$(\partial^2 + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t)$ の解の $\alpha \rightarrow \omega$ での極限

$(\partial^2 + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t)$ の解は $\alpha \neq \omega$ のとき

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t) \quad \cdots (1)$$

と書ける。これの $\alpha \rightarrow \omega$ での極限を単純にとろうとしても分母が 0 になるのでうまく行かない。正しい問題設定は初期条件 $u(0) = A, \dot{u}(0) = B$ を固定して、解の極限を考えることである。

$$(**) \quad (\partial^2 + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t), \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = B \quad (\alpha > 0, \omega > 0)$$

(i) $\alpha \neq \omega$ の場合

(1)のとき、 $u(0) = a + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \dot{u}(0) = \omega b + \alpha \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2}$ なので初期条件と

$a = A - \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}$, $b = \frac{1}{\omega} \left(B - \frac{\alpha q}{\omega^2 - \alpha^2} \right)$ と同値である。ゆえに (**) の解は

$$u(t) = A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} B \sin(\omega t) - \frac{p}{\alpha^2 - \omega^2} (\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)) - \frac{q}{\alpha^2 - \omega^2} \left(\sin(\alpha t) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

そして、 $\alpha \rightarrow \omega$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)}{\alpha - \omega} &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=\omega} \cos(\alpha t) = -t \sin(\omega t) \\ \frac{\sin(\alpha t) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t)}{\alpha - \omega} &= \frac{\sin(\alpha t) - \sin(\omega t)}{\alpha - \omega} - \frac{\frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega} \sin(\omega t)}{\alpha - \omega} \longrightarrow t \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} u(t) &\longrightarrow A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} B \sin(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} \left(t \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) \\ &= A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left(B + \frac{q}{2\omega} \right) \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t) \end{aligned}$$

(ii) $\alpha = \omega$ の場合

$(\partial^2 + \omega^2)u = p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)$ の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t)$$

このとき、 $u(0) = a$, $\dot{u}(0) = \omega b - \frac{q}{2\omega}$ なので $u(0) = A$, $\dot{u}(0) = B$ は $a = A$, $b = \frac{1}{\omega} \left(B + \frac{q}{2\omega} \right)$ と同値。よって解は、

$$u(t) = A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left(B + \frac{q}{2\omega} \right) \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t)$$

これは(i)で得た $\alpha \neq \omega$ の解の $\alpha \rightarrow \omega$ での極限に一致する。

解説: (**) と同値な方程式

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\omega^2 u + p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t), \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = B$$

は周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の調和振動子に外部から周期 $\frac{2\pi}{\alpha}$ で振動する力を与えた様子を記述している。

$\alpha \neq \omega$ であれば解は周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の振動と周期 $\frac{2\pi}{\alpha}$ の振動の和になり、 $\alpha = \omega$ ならば t に比例して振幅が大きくなる解が得られる。

上の計算は $\alpha \neq \omega$ の解のどのような極限によって $\alpha = \omega$ の解が得られるかを示している。

単独1階の線形常微分方程式

$$u = u(x), \partial = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(*) \quad u'(x) = a(x)u(x)$$

解法

$$u(x) = u(0)e^{\int_0^x a(y)dy}$$

例

$$u'(x) = -xu(x) \implies \int_0^x (-y)dy = -\frac{x^2}{2} \text{ より } u(x) = u(0)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

単独1階の非斉次線形常微分方程式

$$(*) \quad u'(x) = a(x)u(x) + b(x)$$

定数変化法

解法: $u(x) = c(x)e^{\int_0^x a(y)dy}$ の形で解を探す。 $u(0) = c(0)$ 。

$$u'(x) = a(x)c(x)e^{\int_0^x a(y)dy} + c'(x)e^{\int_0^x a(y)dy} = a(x)u(x) + c'(x)e^{\int_0^x a(y)dy}$$

これと $(*)$ を比較すると、

$$c'(x) = e^{-\int_0^x a(y)dy} b(x)$$

$$c(x) = u(0) + \int_0^x e^{-\int_0^z a(y)dy} b(z)dz$$

のとき、 $(*)$ の解になる。 $(*)$ の解は次のように書ける：

$$u(x) = c(x)e^{\int_0^x a(y)dy} = u(0)e^{\int_0^x a(y)dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z)dz$$

確認: $u(x) = u(0)e^{\int_0^x a(y)dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z)dz$ のとき、

$$u'(x) = a(x)u(0)e^{\int_0^x a(y)dy} + a(x) \int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z)dz + e^{\int_x^x a(y)dy} b(x) = a(x)u(x) + b(x)$$

OK.

例

$u'(x) = -xu(x) + x$ を解く。

$a(x) = -x, b(x) = x$ なので、

$$\int_z^x (-y)dy = \left[-\frac{y^2}{2} \right]_{y=z}^{y=x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

$$\int_0^x e^{\frac{z}{2}} z dz = \left[e^{\frac{z}{2}} \right]_{z=0}^{z=x} = e^{\frac{x}{2}} - 1$$

よって、

$$u(x) = u(0)e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} - 1) = u(0)e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

確認: そのとき、 $-xu(x) + x = -x(u(x) - 1) = -x(u(0)e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}})$

$$u'(x) = -xu(0)e^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

で一致。OK.

PAGE 6

ベルヌーイ (Bernoulli) 方程式

$$(*) \quad y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^\alpha \quad (\alpha \neq 1 \text{ と仮定})$$

解法

(*) $\iff y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$ であり、かつ $(y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ であることに注意する。

(*) の両辺に $(1-\alpha)$ をかけると、

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)a(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(x)$$

ゆえに、 $u = y^{1-\alpha}$ とおくと、

$$(*) \iff u' = (1-\alpha)a(x)u + (1-\alpha)b(x)$$

これは u に関する単独1階の非斉次線形常微分方程式なので、すでに説明した方法で解ける。□

例: $y' = -xy + xy^3$ を解こう。

$u = y^{1-3} = y^{-2}$ とおくと、 $u' = -2y^{-3}y'$ より、

$$u' = -2y^{-3}(-xy + xy^3) = 2xy^{-2} - 2x = 2xu - 2x$$

$u' = 2xu$ の解 e^{x^2} を用いて、 $u = e^{x^2}c(x)$ の形で解を探そう。そのとき、

$$u' = 2xe^{x^2}c(x) + e^{x^2}c'(x) = 2xu + e^{x^2}c'(x)$$

この u が解であることは、 $e^{x^2}c'(x) = -2x$ すなわち $c'(x) = -2xe^{-x^2}$ と同値。これを解くと、

$$c(x) = e^{-x^2} + C$$

そのとき、 $u = e^{x^2}c(x) = 1 + Ce^{x^2}$ 。元の変数に戻すと、

$$y = \pm u^{-1/2} = \pm(1 + Ce^{x^2})^{-1/2}$$

PAGE 7

連立1階の定数係数線形常微分方程式

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = [a_{ij}] \text{ は } n \times n \text{ の定数行列とする。}$$

$$(*) \quad \dot{u}(t) = Au(t)$$

解法

$$u(t) = e^{tA}u(0), \quad e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

例1: 調和振動子を連立系で表す

$$u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ のとき、 } A^2 = -E \text{ より、}$$

$$e^{tA} = E \cos t + A \sin t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$\dot{u}(t) = Au(t)$ の解は

$$u(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \cos t - v(0) \sin t \\ u(0) \sin t + v(0) \cos t \end{bmatrix}$$

例2: $\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t)$ の行列表現

これは $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$ と表せる。 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$ とおくと、 $\dot{U}(t) = AU(t)$ と書き直される。

$A^2 = -\omega^2 E$ より、 $A^{2k} = (-1)^k \omega^{2k} E$ 、 $A^{2k+1} = (-1)^k \omega^{2k} A = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^k \omega^{2k} \\ (-1)^{k+1} \omega^{2k+2} & 0 \end{bmatrix}$ 。ゆえに、

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k}}{(2k)!} E + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} A = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

解は次のように書ける：

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \cos(\omega t) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega u(0) \sin(\omega t) + \dot{u}(0) \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

特に、 $u(t) = u(0) \cos(\omega t) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(\omega t)$ 。

例3: 対角化による解法

$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ 、 $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ のときの $\dot{U}(t) = AU(t)$ を解こう。

A を対角化しよう。 $|\lambda E - A| = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ より A の固有値は $2, 3$ 。

固有値 2 の固有ベクトルは $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 、固有値 3 の固有ベクトルは $q = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ がとれる。

$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ とおくと、 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ であり、 $A = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1}$ 。

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{2t} - 3e^{3t} & -3e^{2t} + 3e^{3t} \\ 4e^{2t} - 4e^{3t} & -3e^{2t} + 4e^{3t} \end{bmatrix}$$

$U(t) = e^{tA}U(0)$ が求める解になる。

連立1階の非斉次定数係数線形常微分方程式

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = [a_{ij}] \text{ は定数 } n \times n \text{ 行列、} b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}。$$

$$(*) \quad \dot{u}(t) = Au(t) + b(t)$$

解法 (定数変化法)

$\dot{u}(t) = Au(t)$ の解 $u(t) = e^{tA}u(0)$ における定数ベクトル $u(0)$ を、ベクトル値関数 $c(t)$ に置き換えた次の形の解を探す：

$$u(t) = e^{tA}c(t)$$

このとき、 $u(0) = c(0)$ 。

$$\dot{u}(t) = Ae^{tA}c(t) + e^{tA}\dot{c}(t) = Au(t) + e^{tA}\dot{c}(t)$$

これと $(*)$ を比較すると、 $\dot{c}(t) = e^{-tA}b(t)$ 、すなわち

$$c(t) = u(0) + \int_0^t e^{-sA}b(s)ds$$

のとき、 $u(t)$ は $(*)$ の解になる。 $(*)$ の解は次のように書ける：

$$u(t) = e^{tA}c(t) = e^{tA}u(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds$$

例: 行列の積分

$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ 、 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき、 $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ であった。

$\dot{U}(t) = AU(t) + B(t)$ 、 $B(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$ の解は

$$\begin{aligned} U(t) &= e^{tA}U(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)ds \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(t-s) & -\sin(t-s) \\ \sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} u(0) \cos t - v(0) \sin t + \int_0^t (f(s) \cos(t-s) - g(s) \sin(t-s)) ds \\ u(0) \sin t + v(0) \cos t + \int_0^t (f(s) \sin(t-s) + g(s) \cos(t-s)) ds \end{bmatrix} \end{aligned}$$

一般の強制力付きの調和振動子

$$(*) \quad \ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) + f(t) \quad (\omega > 0)$$

解法

これを連立1階の形に書き直すと、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

前の例より $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$ であったから、公式に当てはめると解は：

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(\omega(t-s)) & \omega^{-1} \sin(\omega(t-s)) \\ -\omega \sin(\omega(t-s)) & \cos(\omega(t-s)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(s) \end{bmatrix} ds$$

$u(t)$ 成分だけを取り出すと、一般解の公式が得られる：

$$u(t) = u(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega(t-s)) f(s) ds$$

連立1階の変数係数線形常微分方程式

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) \text{ は } n \times n \text{ 行列値関数、} b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

$$(*) \quad \dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

定数変化法

まず、斉次微分方程式 $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ の基本解行列を $U(t)$ とする。すなわち、 $\dot{U}(t) = A(t)U(t)$ かつ $\det U(t) \neq 0$ を満たす行列値関数である。

(*) の解を $u(t) = U(t)c(t)$ の形で探す。このとき $u(0) = U(0)c(0)$ である。

両辺を t で微分すると、

$$\dot{u}(t) = \dot{U}(t)c(t) + U(t)\dot{c}(t) = A(t)U(t)c(t) + U(t)\dot{c}(t) = A(t)u(t) + U(t)\dot{c}(t)$$

これを (*) と比較すると、

$$U(t)\dot{c}(t) = b(t) \implies \dot{c}(t) = U(t)^{-1}b(t)$$

これを積分して $c(t)$ を求めると、

$$c(t) = c(0) + \int_0^t U(s)^{-1}b(s)ds$$

よって、(*) の一般解は次のようになる：

$$u(t) = U(t)U(0)^{-1}u(0) + \int_0^t U(t)U(s)^{-1}b(s)ds$$

ここで、 $U(t, s) := U(t)U(s)^{-1}$ とおくと、一般解は推移行列（プロパゲーター）を用いて次のように綺麗に表せる：

$$u(t) = U(t, 0)u(0) + \int_0^t U(t, s)b(s)ds$$

推移行列 $U(t, s)$ の性質

$U(t, s) = U(t)U(s)^{-1}$ は以下の基本的な性質を満たす：

1. $\frac{\partial}{\partial t} U(t, s) = A(t)U(t, s)$
2. $U(s, s) = E$ （ E は単位行列）
3. $U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$

定理の証明: $\frac{\partial}{\partial s} U(t, s) = -U(t, s)A(s)$

単位行列の微分 $0 = \frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (X(t)X(t)^{-1}) = \dot{X}(t)X(t)^{-1} + X(t)\frac{d}{dt}(X(t)^{-1})$ より、逆行列の微分公式

$$\frac{d}{dt}(X(t)^{-1}) = -X(t)^{-1}\dot{X}(t)X(t)^{-1}$$

が得られる。これを利用して、推移行列 $U(t, s)$ の s に関する偏微分を計算する：

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} (U(t)U(s)^{-1}) = U(t) \left(-U(s)^{-1} \dot{U}(s) U(s)^{-1} \right)$$

ここで $\dot{U}(s) = A(s)U(s)$ であるから、代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t, s) = -U(t)U(s)^{-1}A(s)U(s)U(s)^{-1} = -U(t, s)A(s)E = -U(t, s)A(s)$$

となり、示された。□

PAGE 12

完全微分方程式 (Exact Differential Equations)

変数 x, y と、適当な領域で定義された関数 $P(x, y), Q(x, y)$ に対し、次の形の方程式を考える：

$$(*) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

ある関数 $\Phi(x, y)$ が存在して、全微分が $d\Phi = Pdx + Qdy$ すなわち

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$$

を満たすとき、 $(*)$ を**完全微分方程式**と呼ぶ。このとき、 $(*)$ の一般解は次のように陰関数の形で与えられる：

$$\Phi(x, y) = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

完全微分方程式であるための必要十分条件（可積分条件）

関数 P, Q が連続な偏導関数を持つとき、 $(*)$ が完全微分方程式であるための必要十分条件は次式が成立することである：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

解法ステップ

- まず $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P$ を x で積分して、 $\Phi(x, y) = \int P(x, y)dx + g(y)$ とおく（ $g(y)$ は y のみの関数）。
- これを y で偏微分し、 $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int \frac{\partial P}{\partial y} dx + g'(y) = Q$ から $g'(y)$ を求める。

3. $g(y)$ を積分で決定し、 $\Phi(x, y) = C$ とおけば解が得られる。

PAGE 13

積分因子 (Integrating Factor)

微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ が完全微分方程式ではない ($\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$) 場合を考える。

このとき、両辺に適当な関数 $\mu(x, y) \neq 0$ を掛け合わせることで、

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

が完全微分方程式になることがある。このときの関数 $\mu(x, y)$ を**積分因子**と呼ぶ。完全微分であるための条件から、 μ は次の偏微分方程式を満たす必要がある：

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \implies \frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}$$

特別な場合 (μ が x のみ、または y のみの関数となる場合)

一般にこの偏微分方程式を解くのは難しいが、特別な場合には簡単に積分因子を求めることができる。

(i) $\mu = \mu(x)$ (x のみの関数) のとき： $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ となるため、

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{d\mu}{dx}Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x} \implies \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

もし右辺の $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ が x だけの関数 $f(x)$ になるならば、積分因子は次のように求まる：

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

PAGE 14

リッカチの方程式 (Riccati Equation)

次の形の非線形1階常微分方程式を考える：

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

解法

この方程式は一般に初等解法を持たないが、何らかの方法で**特殊解** $y_1(x)$ が1つ見つければ、一般解を求めることができる。

$y = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$ において代入すると、 $y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$ となり、方程式は u に関する1階線形常微分方程式に帰着される。

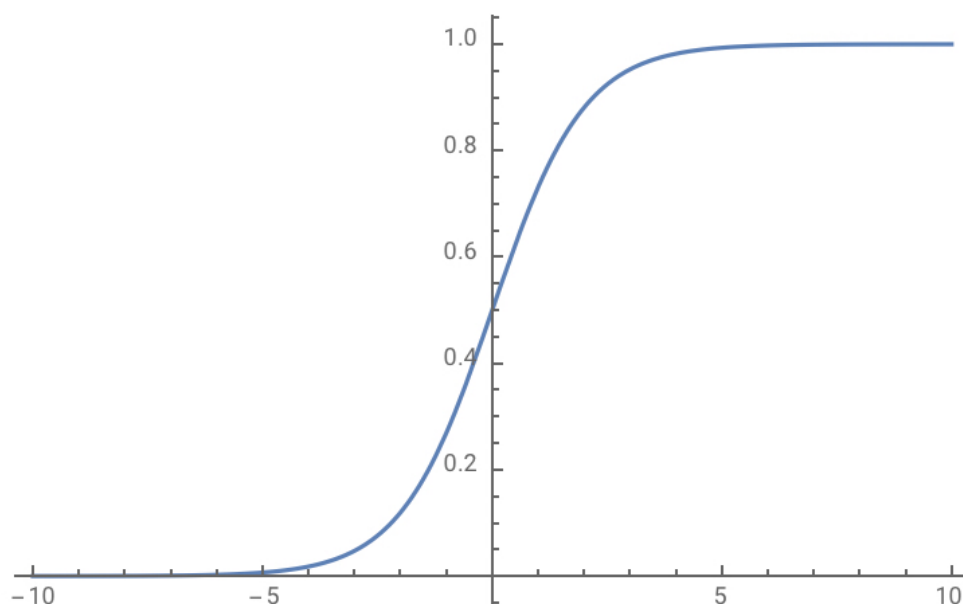
$$u' + (2P(x)y_1(x) + Q(x))u = -P(x)$$

これを積分因子などの手法で解けばよい。

```
In[2]:= Plot[1/(1+Exp[-t]), {t, -10, 10}]
```

プロット 指数関数

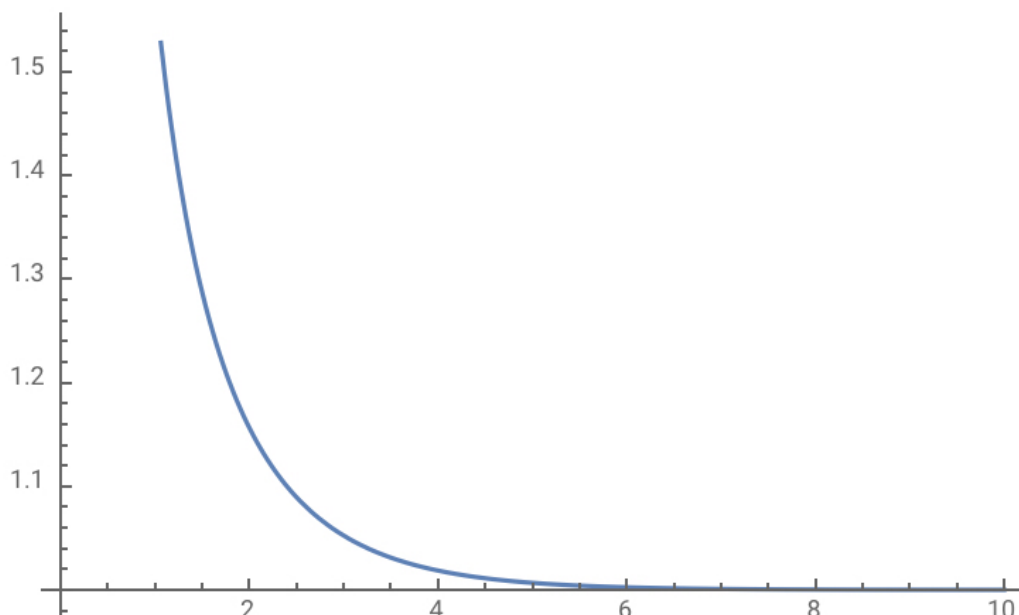
Out[2]=



```
In[4]:= Plot[1/(1-Exp[-t]), {t, 0, 10}]
```

プロット 指数関数

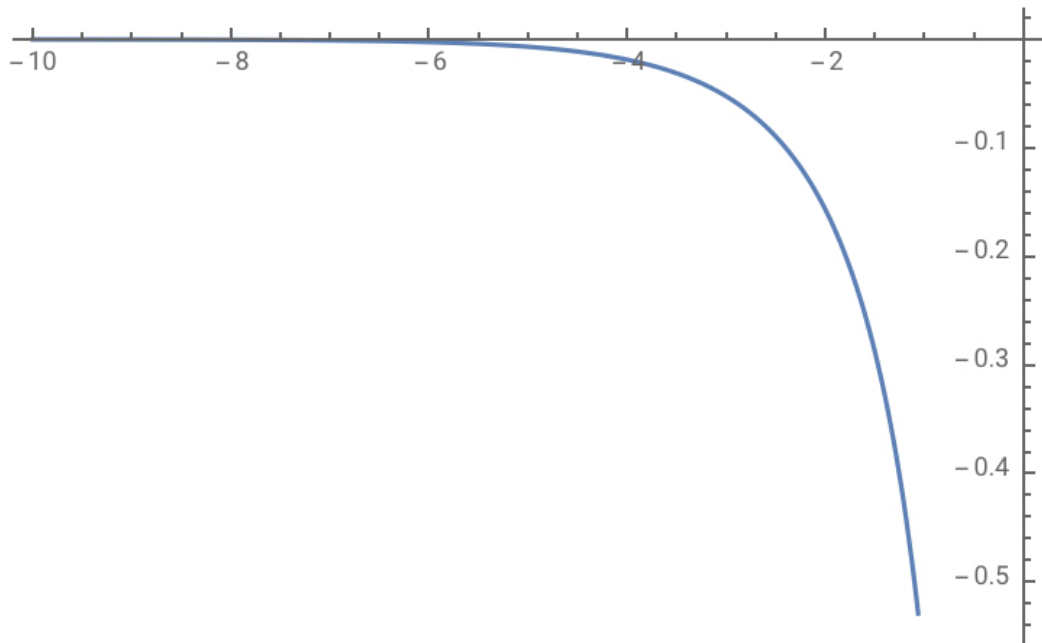
Out[4]=



```
In[5]:= Plot[1/(1-Exp[-t]), {t, -10, 0}]
```

プロット 指数関数

Out[5]=



PAGE 15

クレローの方程式 (Clairaut's Equation)

次の形の方程式をクレローの方程式という：

$$y = xy' + f(y')$$

解法と特異解

両辺を x で微分し、 $y' = p$ とおくと、

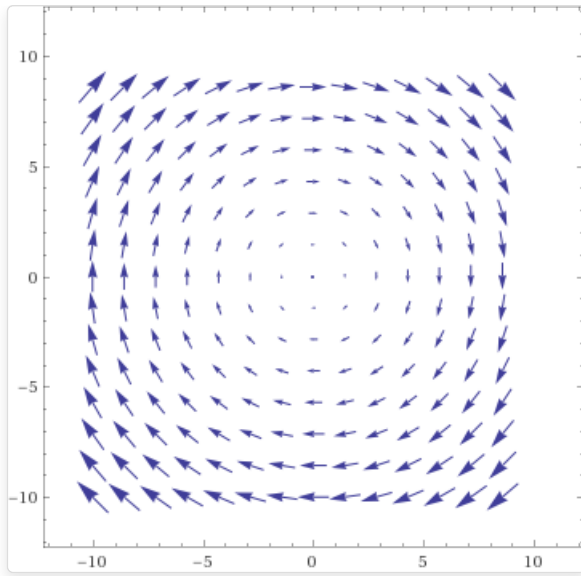
$$p = p + xp' + f'(p)p' \implies p'(x + f'(p)) = 0$$

これより、次の2つの場合が得られる。

1. $p' = 0$ の場合： $p = C$ (定数) となり、これを元の方程式に代入すると、一般解である直線群が得られる。

$$y = Cx + f(C)$$

2. $x + f'(p) = 0$ の場合： この式と $y = xp + f(p)$ からパラメータ p を消去して得られる曲線は、一般解の包絡線（特異解）となる。



PAGE 16

エルミート多項式 (Hermite Polynomials)

量子力学（調和振動子）などで現れる重要な直交多項式である。母関数またはロドリゲスの公式によって定義される。

ロドリゲスの公式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

エルミートの微分方程式

$y = H_n(x)$ は次の2階線形常微分方程式を満たす：

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

この方程式は級数解法により解くことができ、 n が非負整数のときに多項式解（エルミート多項式）を持つ。

PAGE 17

ベクトル場と相空間 (Vector Fields and Phase Space)

自励系の連立1階微分方程式を考える：

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

軌道とベクトル場

平面上の各点 (x, y) にベクトル $(f(x, y), g(x, y))$ を対応させたものをベクトル場という。解曲線 $(x(t), y(t))$ は、各点における接ベクトルがこのベクトル場に一致するような曲線（軌道）となる。

特異点（ $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ となる点）の近傍での線形化により、ノード（結節点）、サドル（鞍点）、スパイラル（渦状点）、センター（中心）などの軌道のトポロジ的性質が分類される。

```
In[1]:= ode3 = {y'[x] == (a x + b y[x]) / (-b x + y[x])}
```

```
Out[1]= {y'[x] == \frac{a x + b y[x]}{-b x + y[x]}}
```

```
In[2]:= DSolve[ode3, y[x], x]
微分方程式を解く
```

```
Out[2]= {{y[x] -> b x - \sqrt{-e^{2 c_1} + a x^2 + b^2 x^2}}, {y[x] -> b x + \sqrt{-e^{2 c_1} + a x^2 + b^2 x^2}}}
```

PAGE 18

Riccati（リッカチ）方程式

$$(*) \quad u'(x) + a(x)u(x)^2 + b(x)u(x) + c(x) = 0 \quad (a(x) \text{ は } 0 \text{ でない関数}) \quad \text{以下、} \partial = \frac{\partial}{\partial x}$$

解法

$u(x) = \frac{1}{a(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$ とおくと、 $\psi(x)$ に関する2階の線形常微分方程式

$$\left(\partial^2 + \left(b(x) - \frac{a'(x)}{a(x)} \right) \partial + a(x)c(x) \right) \psi(x) = 0$$

に帰着する。

【確認】

$u = \frac{1}{a} \frac{\psi'}{\psi}$ のとき、

$$u' = -\frac{a'}{a^2} \frac{\psi'}{\psi} + \frac{1}{a} \frac{\psi''}{\psi} - \frac{1}{a} \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2$$

$$au^2 + bu + c = \frac{1}{a} \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \frac{b}{a} \frac{\psi'}{\psi} + c$$

これらを組み合わせると、元の式は以下のように整理される：

$$u' + au^2 + bu + c = \frac{1}{a\psi} \left(\psi'' + \left(b - \frac{a'}{a} \right) \psi' + ac\psi \right) = 0$$

例1: α, β が定数のとき $u' + (u - \alpha)(u - \beta) = 0$ を解こう。

$u = \frac{\psi'}{\psi}$ において、

$$\psi'' - (\alpha + \beta)\psi' + \alpha\beta\psi = (\partial - \alpha)(\partial - \beta)\psi = 0$$

を解けばよい。この解は $\psi(x) = ae^{\alpha x} + be^{\beta x}$ なので、求める解は次のように得られる：

$$u(x) = \frac{a\alpha e^{\alpha x} + b\beta e^{\beta x}}{ae^{\alpha x} + be^{\beta x}}$$

例2: α, β が定数のとき $u' + \frac{1}{x}(u - \alpha)(u - \beta) = 0$ を解こう。

$u = x \frac{\psi'}{\psi}$ とおくと、

$$\psi'' - \frac{\alpha + \beta - 1}{x}\psi' + \frac{\alpha\beta}{x^2}\psi = \left(\partial - \frac{\beta - 1}{x} \right) \left(\partial - \frac{\alpha}{x} \right) \psi = \left(\partial - \frac{\alpha - 1}{x} \right) \left(\partial - \frac{\beta}{x} \right) \psi = 0$$

この解は $\psi(x) = ax^\alpha + bx^\beta$ となるので、解は次のようになる：

$$u(x) = x \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{a\alpha x^\alpha + b\beta x^\beta}{ax^\alpha + bx^\beta}$$

例3: $u'(x) - 3u(x)^2 + \frac{2}{x^2} = 0$ を解こう。

$u = -\frac{1}{3} \frac{\psi'}{\psi}$ とおくと、 $\psi'' = \frac{6}{x^2}\psi$ となり、その解は $\psi(x) = ax^3 + bx^{-2}$ 。したがって、

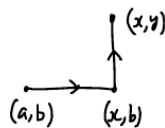
$$u(x) = -\frac{1}{3} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = -\frac{1}{3} \frac{3ax^2 - 2bx^{-3}}{ax^3 + bx^{-2}}$$

完全微分方程式 $q_x(x, y) = p_y(x, y)$ のとき, 可積分条件と呼ばれる.

(*) $df(x, y) = p(x, y)dx + q(x, y)dy$ (これは $f_x = p, f_y = q$ と同値)

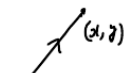
を満たす函数 $f(x, y)$ を求めよ.

解法例 1 $f(x, y) = \int_a^x p(s, y)ds + \int_b^y q(x, t)dt.$



確認 $\begin{cases} f_x(x, y) = p(x, y) + \int_b^y q_x(x, t)dt = p(x, y) + \int_b^y p_y(x, t)dt = p(x, y) + [p(x, t)]_{t=b}^{t=y} = p(x, y), \\ f_y(x, y) = q(x, y). \end{cases}$ OK. □

解法例 2 $f(x, y) = \int_0^1 (p(xt, yt)x + q(xt, yt)y)dt$



確認 $f_x(x, y) = \int_0^1 (p(xt, yt) + p_x(xt, yt)x + q_x(xt, yt)y)dt$
 $= \int_0^1 (p(xt, yt) + p_x(xt, yt)x + p_y(xt, yt)y)dt$
 $= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (p(xt, yt)t)dt = [p(xt, yt)t]_{t=0}^{t=1} = p(x, y).$

(注) $pdx + qdy$ が“可積分条件”を満たしていないとき, うまく $\lambda = \lambda(x, y)$ をみつければ $\lambda pdx + \lambda qdy$ が可積分条件を満たすことがある. そのとき, λ を 積分因子 と呼ぶ. 詳しくは説明しない.

同様にして, $f_y(x, y) = q(x, y).$

OK. □

注意 $f_x = p, f_y = q$ のとき, $p_y = f_{xy} = f_{yx} = q_x$. $df = pdx + qdy$ を満たす f が存在するためには $p_y = q_x$ という 可積分条件 が必要である. 以上の議論は一般の微分形式に拡張される. □

例 $df = 2xy dx + (x^2 + \cos y)dy$ を満たす $f = f(x, y)$ を求めよう. $p = 2xy, q = x^2 + \cos y$ のとき,
 $p_y = 2x = q_x$ なのて可積分条件を満たしている.

$f(x, y) = \int_0^x 2s \cdot 0 ds + \int_0^y (x^2 + \cos t)dt = x^2 y + \sin y.$ **確認** $\begin{cases} f_x = 2xy, \\ f_y = x^2 + \cos y. \end{cases}$ (OK) □

例 $df = (x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy$ を満たす $f = f(x, y)$ を求めよう. $(x^2 - y)_y = -1 = (y^2 - x)_x$ なのて可積分条件を満たしている.

$f(x, y) = \int_0^x (s^2 - 0)ds + \int_0^y (t^2 - x)dt = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - xy$ **確認** $\begin{cases} f_x = x^2 - y, \\ f_y = -x + y^2. \end{cases}$ (OK) □

例 $df = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$ を満たす $f = f(x, y)$ を求めよう. ← これはおもしろい例.

$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ なのて可積分条件を満たす.

$f(x, y) = \int_0^x \frac{-0}{s^2 + 0^2}ds + \int_0^y \frac{x}{x^2 + t^2}dt = \int_0^{y/x} \frac{du}{1 + u^2} = \arctan \frac{y}{x}.$ ← 多価函数とみなされる.

確認 $f_x = \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, f_y = \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$ (OK) □

$u = \frac{1}{a} \frac{\psi'}{\psi}$ という変換の出所

$$(*) \quad u' + Au^2 + Bu + C = 0 \quad (u = u(x), A = A(x), B = B(x), C = C(x))$$

$u = \frac{1}{A}v$ とおくと、

$$u' + Au^2 + Bu + C = \frac{1}{A}v' - \frac{A'}{A^2}v + \frac{1}{A}v^2 + \frac{B}{A}v + C = \frac{1}{A} \left(v' + v^2 + \left(B - \frac{A'}{A} \right) v + AC \right)$$

となるため、 $b = B - \frac{A'}{A}$, $c = AC$ とおくことで、(*) は次の (★) に帰着する ($a = 1$ の場合に相当) :

$$(\star) \quad v' + v^2 + bv + c = 0$$

さらに、 $v = \frac{\psi'}{\psi}$ とおくと、交差項がキャンセルし、次のように整理される :

$$v' + v^2 + bv + c = \frac{\psi''}{\psi} - \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \frac{b\psi'}{\psi} + \frac{c\psi}{\psi} = \frac{1}{\psi} (\psi'' + b\psi' + c\psi)$$

ゆえに、(★) は次の2階線形常微分方程式 (★★) に帰着する :

$$(\star\star) \quad \psi'' + b\psi' + c\psi = (\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0$$

注意: 演算子の因数分解とRiccati方程式の関係

次の2つの微分方程式の関係を考えてみよう :

$$\begin{cases} v = \frac{\psi'}{\psi} \iff \psi' - v\psi = (\partial - v)\psi = 0 \\ (\star\star) \quad (\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0 \end{cases}$$

多項式のように $\partial^2 + b\partial + c$ を $\partial - v$ で右から割ってみると、演算子の非可換性 ($\partial \circ v = v\partial + v'$) により、次のように展開できる :

$$\partial^2 + b\partial + c = (\partial + (v + b))(\partial - v) + (v' + v^2 + bv + c)$$

ここで、Riccati方程式の左辺が「余り」として自然に出現することがわかる。

- $v' + v^2 + bv + c = 0$ ならば、 $(\partial - v)\psi = 0$ の解 ψ は自動的に $(\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0$ を満たす。

- 逆に、 ψ が $(\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0$ の 0 でない解ならば、 $v = \psi'/\psi$ とおくことで $v' + v^2 + bv + c = 0$ が得られる。

原本ノート画像 (PAGE 19)

リッカティ
Riccati 方程式

(*) $u'(x) + a(x)u(x)^2 + b(x)u + c(x) = 0$ ($a(x)$ は 0 でない函数)、以下、 $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$,

解法 $u(x) = \frac{1}{a(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$ とおくと、 $\psi(x)$ に関する 2 階の線形常微分方程式

$$\left(\partial^2 + \left(b(x) - \frac{a'(x)}{a(x)}\right)\partial + a(x)c(x)\right)\psi(x) = 0$$

に帰着する。以下はそのことの正確な記述: $u = \frac{1}{a} \frac{\psi'}{\psi}$ のとき、

$$u' = -\frac{a'}{a^2} \frac{\psi'}{\psi} + \frac{1}{a} \frac{\psi''}{\psi} - \frac{1}{a} \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2, \quad au^2 + bu + c = \frac{1}{a} \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 + \frac{b}{a} \frac{\psi'}{\psi} + c \text{ なのて、}$$

$$u' + au^2 + bu + c = \frac{1}{a\psi} (\psi'' + (b - \frac{a'}{a})\psi' + ac\psi).$$

□

例 α, β が定数のときの $u' + (u-\alpha)(u-\beta) = 0$ を解こう。 $u = \frac{\psi'}{\psi}$ とおくと、

$$\psi'' - (\alpha + \beta)\psi' + \alpha\beta\psi = (\partial - \alpha)(\partial - \beta)\psi = 0$$

を解けばよい。これの解は $\psi(x) = ae^{\alpha x} + be^{\beta x}$ なのて、 $u(x) = \frac{a\alpha e^{\alpha x} + b\beta e^{\beta x}}{ae^{\alpha x} + be^{\beta x}}$.

□

例 α, β が定数のときの $u' + \frac{1}{x}(u-\alpha)(u-\beta) = 0$ を解こう。 $u = x \frac{\psi'}{\psi}$ とおくと、

$$\psi'' - \frac{\alpha + \beta - 1}{x}\psi' + \frac{\alpha\beta}{x^2}\psi = \left(\partial - \frac{\beta-1}{x}\right)\left(\partial - \frac{\alpha}{x}\right)\psi = \left(\partial - \frac{\alpha-1}{x}\right)\left(\partial - \frac{\beta}{x}\right)\psi = 0.$$

これの解は $\psi(x) = ax^\alpha + bx^\beta$ なのて $u(x) = x \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{a\alpha x^\alpha + b\beta x^\beta}{ax^\alpha + bx^\beta}$.

□

例 $u'(x) - 3u(x)^2 + \frac{2}{x^2} = 0$ を解こう。 $u = -\frac{1}{3} \frac{\psi'}{\psi}$ とおくと、 $\psi'' = \frac{6}{x^2}\psi$ なのて $\psi(x) = ax^3 + bx^{-2}$,

$$u(x) = -\frac{1}{3} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = -\frac{1}{3} \frac{3ax^2 - 2bx^{-3}}{ax^3 + bx^{-2}}.$$

□

完全微分方程式と可積分条件

$$(*) \quad df(x, y) = P(x, y)dx + g(x, y)dy \quad (\text{これは } f_x = P, f_y = g \text{ と同値})$$

を満たす関数 $f(x, y)$ を求める問題。 $P_y = g_x$ が成り立つとき、この条件を**可積分条件**と呼ぶ。

解法例1 (折れ線経路による積分)

点 $(a, b) \rightarrow (x, b) \rightarrow (x, y)$ という経路で積分を行うと、

$$f(x, y) = \int_a^x P(s, b)ds + \int_b^y g(x, t)dt$$

【確認】

$$f_x(x, y) = P(x, b) + \int_b^y g_x(x, t)dt = P(x, b) + \int_b^y P_y(x, t)dt = P(x, b) + [P(x, t)]_{t=b}^{t=y} = P(x, y)$$

$$f_y(x, y) = g(x, y) \quad \text{OK.}$$

解法例2 (原点からの直線経路による積分)

点 $(0, 0) \rightarrow (x, y)$ を結ぶ直線 $t \mapsto (xt, yt)$ に沿って積分を行うと、

$$f(x, y) = \int_0^1 (P(xt, yt)x + g(xt, yt)y)dt$$

【確認】 x で偏微分し、可積分条件 $g_x = P_y$ を用いると、

$$f_x(x, y) = \int_0^1 (P(xt, yt) + P_x(xt, yt)xt + g_x(xt, yt)yt)dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(P(xt, yt)t)dt = [P(xt, yt)t]_{t=0}^{t=1} = P(x, y)$$

補足：積分因子について

もし $Pdx + qdy$ が可積分条件を満たしていない場合でも、適当な関数 $\lambda(x, y)$ を掛けて $\lambda Pdx + \lambda qdy$ とすることで可積分条件を満たすようにできる場合がある。このとき λ を**積分因子**と呼ぶ。

例題1: $df = 2xydx + (x^2 + \cos y)dy$

$P = 2xy, g = x^2 + \cos y$ より、 $P_y = 2x = g_x$ (可積分条件を満足)。

$$f(x, y) = \int_0^x 2s \cdot 0 \, ds + \int_0^y (x^2 + \cos t) \, dt = x^2 y + \sin y$$

例題2: $df = (x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy$

$(x^2 - y)_y = -1 = (y^2 - x)_x$ (可積分条件を満足)。

$$f(x, y) = \int_0^x (s^2 - 0) \, ds + \int_0^y (t^2 - x) \, dt = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - xy$$

例題3 (重要): $df = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

偏微分を計算すると、双方とも $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ となり可積分条件を満たす。

$$f(x, y) = \int_0^x \frac{-0}{s^2 + 0^2} \, ds + \int_0^y \frac{x}{x^2 + t^2} \, dt \xrightarrow{t=xu} \int_0^{y/x} \frac{du}{1 + u^2} = \arctan \frac{y}{x}$$

※ この関数は原点の周りを一周すると値が 2π 変化する**多価関数** (複素対数関数の虚部、すなわち偏角 θ) とみなされる。

原本ノート画像 (PAGE 20)

Riccati 方程式の理論的背景

$u = \frac{1}{a} \frac{\psi'}{\psi}$ という変換の出所

$$(*) \quad u' + Au^2 + Bu + C = 0. \quad (u = u(x), A = A(x), B = B(x), C = C(x))$$

$$u = \frac{1}{A} v \text{ とおくと,}$$

$$u' + Au^2 + Bu + C = \frac{1}{A} v' - \frac{A'}{A^2} v + \frac{1}{A} v^2 + \frac{B}{A} v + C = \frac{1}{A} (v' + v^2 + (B - \frac{A'}{A})v + AC)$$

なので, $u = \frac{1}{A} v$, $b = B - \frac{A'}{A}$, $c = AC$ とおくと, $(*)$ は次の $(*)$ に帰着する:

$$(*) \quad v' + v^2 + bv + c = 0. \quad \text{ここが "a=1" となっている.}$$

$$\text{さらに, } v = \frac{\psi'}{\psi} \text{ とおくと,}$$

$$v' + v^2 + bv + c = \frac{\psi''}{\psi} - \underbrace{\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2}_{\text{キャンセル}} + \frac{b\psi'}{\psi} + \frac{c\psi}{\psi} = \frac{1}{\psi} (\psi'' + b\psi' + c\psi).$$

ゆえに, $v = \frac{\psi'}{\psi}$ とおくと, $(*)$ は次の $(**)$ に帰着する:

$$(**) \quad \psi'' + b\psi' + c\psi = (\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0.$$

ここまでは本質的に
1つ前の資料で説明した.

注意 $\begin{cases} v = \frac{\psi'}{\psi} \Leftrightarrow \psi' - v\psi = (\partial - v)\psi = 0. \\ (*) \quad (\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0. \end{cases}$ この2つの線形常微分方程式の
あいだの関係について考えてみる.

$\partial^2 + b\partial + c$ を $\partial - v$ で右から割ってみる!

$$\begin{array}{r} \text{右\左 } \partial + (v+b) \\ \hline \partial - v \sqrt{\partial^2 + b\partial + c} \\ \partial^2 - v\partial - v' \\ \hline (v+b)\partial + v' + c \\ (v+b)\partial - v^2 - bv \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} v\partial + v' \\ \hline \partial \circ (\partial - v) = \partial^2 - \overbrace{\partial \circ v}^{v\partial + v'} = \partial^2 - v\partial - v' \\ (v+b)(\partial - v) = (v+b)\partial - v^2 - bv \end{array}$$

余り $\rightarrow v' + v^2 + bv + c \leftarrow \text{Riccati 方程式の形が出て来た!}$

すなわち, $\partial^2 + b\partial + c \stackrel{(*)}{=} (\partial + (v+b))(\partial - v) + \underline{v' + v^2 + bv + c}$. 余り
Riccati 方程式は余りとして出て来る!

$v' + v^2 + bv + c = 0$ ならば $(\partial - v)\psi = 0$ の解 ψ は $(\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0$ を満たす.
逆に ψ が $(\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0$ の0でない解ならば ψ は $v = \psi'/\psi$ について $(\partial - v)\psi = 0$
を満たすので, $(*)$ の両辺を ψ に作用させることによって, $(v' + v^2 + bv + c)\psi = 0$
すなわち $v' + v^2 + bv + c = 0$ を得る.

$$(*) \quad y = xy' - f(y') \quad (y = y(x))$$

解法と一般解・特異解

(*) の両辺を x で微分すると、 $y' = y' + xy'' - f'(y')y''$ より、

$$y''(x - f'(y')) = 0$$

- $y'' = 0$ の場合: $y' = p = C$ (定数) となるため、元の方程式に代入して**一般解 (直線群)** が得られる。

$$y = Cx - f(C)$$

- $x = f'(y')$ の場合: $y' = p(x)$ とすると、**特異解 (一般解の包絡線)** が得られる。

$$y = xp(x) - f(p(x))$$

注意: Legendre (ルジャンドル) 変換との関係

クレローの方程式は、解析力学や熱統計力学で重要な役割を果たす **Legendre 変換** と深い関係がある。一般解の直線群が包絡線 (特異解) を形作る様子は、Legendre変換の幾何学的意味そのものである。

また、一般解 $y = ax - f(a)$ は、特異解上の点 x_0 (ただし $p(x_0) = a$) における接線方程式 $y = ax - f(a)$ に一致している。

例題1: $f(p) = \frac{1}{2}p^2 - \alpha$ (α は定数) のとき

方程式は $y = xy' - \frac{1}{2}(y')^2 + \alpha$ 。微分すると $y''(x - y') = 0$ 。

- $y'' = 0 \implies$ 一般解: $y = px - \frac{1}{2}p^2 + \alpha$
- $y' = x \implies$ 特異解: $y = x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \alpha = \frac{1}{2}x^2 + \alpha$ (放物線)

例題2: $f(p) = p \log p - p - \alpha$ のとき

方程式は $y = xy' - y' \log y' + y' + \alpha$ 。微分すると $y''(x - \log y') = 0$ 。

- $y'' = 0 \implies$ 一般解: $y = px - p \log p + p + \alpha$
- $x = \log y' \implies y' = e^x \implies$ 特異解: $y = xe^x - e^x x + e^x + lpha = e^x + \alpha$ (指数関数)

クレロー Clairaut 方程式 $(*) \quad y = xy' - f(y')$ ($y = y(x)$)

解法 $(*)$ の両辺を微分すると, $y' = y' + xy'' - f'(y')y'$ となる $y''(x - f'(y')) = 0$.

$y'' = 0$ のとき y' は定数となるので, $y' = p = (\text{定数})$ とおくと, $y = xp - f(p)$, これは $(*)$ の解になっている.

$x = f'(y')$ のとき $f'(y') = x$ を y' について解いた結果を $y' = p(x)$ と書くと, $y = xp(x) - f(p(x))$.

これも $(*)$ の解になっている. (確認: $f'(p(x)) = x$, $y = xp(x) - f(p(x))$ のとき,

$y' = p(x) + xp'(x) - \underbrace{f'(p(x))p'(x)}_{=x} = p(x)$ なので, $y = xy' - f(y')$. OK.) $\square$

注意 Clairaut 方程式は解析力学や熱統計力学に出て来る ^{ルジャンドル} Legendre 変換と関係がある. $\square$

注意 $y'' = 0$ のときの解 $y = xa - f(a)$ は $x = f'(y')$ のときの解 $y = xp(x) - f(p(x))$ ($f'(p(x)) = x$) の接線になっている. $y = xp(x) - f(p(x))$, $f'(p(x)) = x$ のとき, $y' = p(x)$ なので, $p(x_0) = a$ とする x_0 をとると, $x = x_0$ で接する接線は $y = a(x - x_0) + x_0 \underbrace{p(x_0)}_{=a} - \underbrace{f(p(x_0))}_a = ax - f(a)$ になる. $\square$

例 $f(p) = \frac{1}{2}p^2 - d$ (d は定数) のとき, $y = xy' - f(y') = xy' - \frac{1}{2}(y')^2 + d$ の解を求めよう.

両辺を微分すると, $y' = y' + xy'' - y'y''$ となる, $y''(x - y') = 0$.

$y'' = 0$ のとき 定数 p を y' に代入した $y = xp - \frac{1}{2}p^2 + d$ が解になる.

$y' = x$ のとき x を y' に代入した $y = x^2 - \frac{1}{2}x^2 + d = \frac{1}{2}x^2 + d$ が解になる. $\square$

例 $f(p) = p \log p - p - d$ のとき, $y = xy' - f(y') = xy' - y' \log y' + y' + d$ の解を求めよう.

両辺を微分すると, $y' = y' + xy'' - y'' \log y' - y'' + y''$ となる $y''(x - \log y') = 0$.

$y'' = 0$ のとき $y = xp - p \log p + p + d$ が解になる.

$x = \log y'$ のとき $y' = e^x$ を代入した $y = xe^x - e^x x + e^x + d = e^x + d$ が解になる. $\square$